Probabilités

1 Espaces probabilisés sur un univers au plus dénombrable

1.1 Tribu

Définition 1 – Tribu

Soit Ω un ensemble (c'est l'univers). On appelle *tribu* sur Ω un ensemble $\mathscr{A}$ de parties de Ω tel que :

① $\Omega \in \mathscr{A}$;

② Pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A} = A^c = \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$ (stabilité par passage au complémentaire) ;

③ Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, la réunion $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ (stabilité par union dénombrable).

Proposition 2 – Quelques propriétés des tribus

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur l'univers Ω.

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, l'intersection $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ (stabilité par intersection dénombrable).
3. Si $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{A}^n$ alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$ et $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$ (stabilité par union et intersection finie).
4. Si $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, $A \setminus B \in \mathscr{A}$ (stabilité par différence).

Démonstration. 1. $\varnothing = \overline{\Omega}$. 2. Passer au complémentaire. 3. Prendre une suite stationnaire. 4. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. ❑

Exemple 3 – *Exemples de tribu*

1. $\{\varnothing, \Omega\}$ est la tribu triviale.
2. L'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω est une tribu, appelée *tribu pleine*, c'est celle qu'on utilisera la plupart du temps.

1.2 Vocabulaire probabiliste

Définition 4 – Espace probabilisable

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur un univers Ω.

- Les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés *événements*.
- Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé *espace probabilisable*.

En probabilités, on utilise des ensembles mais avec un vocabulaire spécifique :

Notation	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
$\varnothing$	Ensemble vide	
Ω	Ensemble plein	
$A \in \mathscr{A}$	Élément de $\mathscr{A}$	
$\overline{A}$	Complémentaire de A (dans Ω)	
$A \cup B$	Réunion de A et B	
$A \cap B$	Intersection de A et B	
$A \cap B = \varnothing$	Ensembles disjoints	

Remarque. Plus généralement, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements,

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N},\, x \in A_n\} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N},\, x \in A_n\}.$$

Exemple 5 – *Décomposer des événements*

Deux joueurs, ... et .... lancent le même dé à tour de rôle avec .... qui commence. Le gagnant est le premier à obtenir un 6, le jeu s'arrête alors.
On définit les événements :

- ... = « Victoire de .... »,
- ... = « Victoire de .... »,
- ... = « Pas de vainqueur »,
- $\forall i \in \mathbb{N}^*$, S_i = « Obtenir un 6 au i-ème lancer »,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, F_n = « Obtenir le premier 6 au n-ème lancer ».

Exprimer les trois premiers événements en fonction des F_n, et F_n en fonction des S_i.

1.3 Définition d'une probabilité

Définition 6 – Probabilité, espace probabilisé

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur un univers Ω.
On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une application $P\colon \mathscr{A} \to [0\,;1]$ vérifiant

① $P(\Omega) = 1$;

② la *σ-additivité* : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux **incompatibles**,

$$P\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un *espace probabilisé*.

Remarque. Soit Ω un univers dénombrable, *i.e.* $\Omega = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, muni de la tribu pleine $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable de réels positifs de somme 1, on définit une probabilité sur Ω en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\{x_n\}) = p_n$. Dans ce cas, pour tout événement A, $P(A) = \sum\limits_{x_n \in A} p_n$.

⚠ Si Ω est infini, l'équiprobabilité sur Ω n'a pas de sens.

Définition 7 – Événement presque sûr, événement négligeable

- Un événement A vérifiant $P(A) = 1$ est dit *presque sûr*.
- Un événement A vérifiant $P(A) = 0$ est dit *négligeable*.

1.4 Propriétés d'une probabilité

Jusqu'à la fin du chapitre, on fixe $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

Proposition 8 – Propriétés d'une probabilité

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. Pour toute famille $(A_1, \dots, A_n)$ d'événements deux à deux **incompatibles**, $P\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$.
3. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
4. Pour A et B deux événements, $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
5. *Croissance* : Si $A \subset B$ sont deux événements alors $P(A) \leqslant P(B)$.
6. Pour A et B deux événements, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration. 1+2. σ-add avec des événements impossibles. 3. $A \sqcup \overline{A} = \Omega$ et utiliser 2. 4. $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$ et utiliser 2. 5. Conséquence de 4. 6. $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$ puis 2. et 4. ❑

Exemple 9 – *Jouer avec les propriétés*

Soit S un événement presque sûr. Montrer que pour tout événement A, on a $P(A \cap S) = P(A)$.

Proposition 10 – Continuité croissante / décroissante

- *Continuité croissante* : Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (pour l'inclusion, *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$), alors

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

- *Continuité décroissante* : Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion, *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$), alors

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Démonstration. • On pose $B_0 = A_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. On vérifie que les B_n sont deux à deux incompatibles et que leur union est la même que celle des A_n. On conclut alors par σ-additivité et un télescopage. • Le second point découle du premier en considérant la suite $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. ❑

Corollaire 11 – Limite de la probabilité d'une union ou d'une intersection

Pour tout suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pas nécessairement monotone), on a

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right).$$

Exemple 12 – *Jeu sans vainqueur*

On reprend le jeu de l'exemple 5. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de vainqueur.

Corollaire 13 – Sous-additivité / Inégalité de Boole

Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

1.5 Événements indépendants

Définition 14 – Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont dits *indépendants* si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

Proposition 15 – Indépendance avec l'événement contraire

Si A et B sont deux événements indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration. $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$ et on utilise l'indépendance de A et B. ❑

Exemple 16 – *Indépendants ?*

On lance deux fois une pièce. On définit F_1 : « obtenir face au premier lancer » et I : « obtenir deux fois le même résultat ». Les événements F_1 et I sont-ils indépendants dans le cas où :

a) la pièce est équilibrée ?

b) la pièce est truquée de façon que la probabilité d'obtenir face vaut $\frac{3}{5}$?

Définition 17 – Indépendance d'une famille finie d'événements

On dit que la famille finie d'événements $(A_1, \dots, A_n)$ est *indépendante* si pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ et tous $i_1 < \cdots < i_k \in [\![1\,;n]\!]$, $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$.

Remarque. Par exemple, lors de lancers successifs d'un même dé, si l'événement A_i ne dépend que du i-ème lancer, alors la famille $(A_1, \dots, A_n)$ est indépendante.

Exemple 18 – *Indépendance d'une famille vs événements deux à deux indépendants*

On lance deux fois un dé équilibré. On définit les événements :

- A : « obtenir 1 au premier lancer »,
- B : « obtenir deux fois le même résultat »,
- C : « obtenir 5 au deuxième lancer ».

On a $P(A) = \dfrac{1}{6}$, $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ et $P(C) = \dfrac{1}{6}$.

1. Ces trois événements sont-ils deux à deux indépendants ?

2. La famille (A, B, C) est-elle indépendante ?

3. Qu'a-t-on mis en évidence ?

Proposition 19 – Famille indépendante et événements contraires

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements indépendants. Soient $B_1, \dots, B_n$ des événements tels que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.
Alors la famille $(B_1, \dots, B_n)$ est indépendante.

Démonstration. C'est une généralisation de la proposition 15. ❑

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Définition

Définition 20 – Probabilité conditionnelle

Soient A un événement et B un événement tel que $P(B) \neq 0$.
On appelle *probabilité (conditionnelle) de A sachant B*, notée $P_B(A)$ ou $P(A \mid B)$, le quotient

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Remarque. Si de plus $P(A) \neq 0$, on a les égalités pratiques $P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B)$.

Exemple 21 – *Probabilités conditionnelles*

1. On jette un dé équilibré. On définit A : « obtenir 5 » et B : « obtenir un nombre impair ».

   $P(A \mid B) =$

2. Une urne contient trois boules jaunes et deux boules rouges. On effectue deux tirages successifs sans remise. Pour $i \in \{1, 2\}$, on définit R_i : « tirer une boule rouge au i-ème tirage ».
   Dessiner l'arbre pondéré représentant la situation puis donner les probabilités suivantes.

   $P(R_1) =$

   $P(R_2 \mid R_1) =$

   $P(R_1 \cap R_2) =$

Proposition 22 – Indépendance et probabilité conditionnelle

Soient A un événement et B un événement tel que $P(B) \neq 0$.
Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Proposition 23 – Une probabilité conditionnelle est une probabilité

Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$.
L'application $P_B \colon \mathscr{A} \to [0\,;1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Démonstration. Pour la σ-additivité, remarquer que $B \cap \bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n = \bigsqcup_{n \geqslant 0} (B \cap A_n)$ et utiliser la σ-additivité de P. ❑

2.2 Formule des probabilités composées

Théorème 24 – Formule des probabilités composées

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. On a l'égalité

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Démonstration. Partir du membre de droite, utiliser la définition 20 d'une probabilité conditionnelle, télescoper. ❑

Exemple 25 – *Utilisation de la formule des probabilités composées*

On considère de nouveau une urne contenant trois boules jaunes et deux boules rouges. On effectue trois tirages successifs sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir trois boules jaunes.

2.3 Formule des probabilités totales

Définition 26 – Système complet / quasi-complet d'événements

- On appelle *système complet d'événements* une famille $(A_i)_{i\in I}$ finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles tels que $\Omega = \bigsqcup_{i\in I} A_i$.
- On appelle *système quasi-complet d'événements* une famille $(A_i)_{i\in I}$ finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{i\in I} P(A_i) = 1$.

Théorème 27 – Formule des probabilités totales

Soient $(A_i)_{i\in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements et B un événement. On a

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B),$$

avec la convention $P(A_i)P_{A_i}(B) = 0$ lorsque $P(A_i) = 0$.

Démonstration. $B = B\cap\Omega \overset{\text{sce}}{=} B\cap \bigsqcup_{i\in I} A_i = \bigsqcup_{i\in I}(B\cap A_i)$ et σ-additivité. ❑

C'est probablement (!) la formule la plus importante de ce cours. On l'utilise assez souvent dans le cas d'un système complet d'événement $(A, \overline{A})$ et dans ce cas

$$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

Exemple 28 – *Utilisation de la formule des probabilités totales*

On reprend la situation de l'exemple 21. Calculer $P(R_2)$.

2.4 Formule de Bayes

Théorème 29 – Formule de Bayes, première version

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. On a

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

Démonstration. Voir remarque suivant la définition 20 d'une probabilité conditionnelle. ❑

Remarques.

1. Cette formule permet de « renverser » les conditionnements. On dit parfois qu'elle permet de calculer la probabilité des causes connaissant celles des conséquences.
2. En pratique, le calcul du dénominateur se fait souvent avec la formule des probabilités totales.

Théorème 30 – Formule de Bayes, seconde version

Soient $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'événements et B un événement.
Pour tout $k \in I$, on a

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}.$$

Exemple 31 – *Utilisation de la formule de Bayes*

On reprend la situation de l'exemple 21. Calculer $P(R_1 \mid R_2)$.